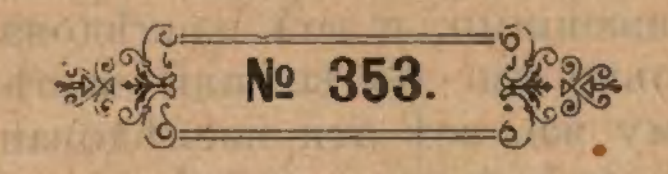
XXX Сем. № 6.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

15 Сентября  № 353. 1903 г.

О новѣйшихъ проекціонныхъ аппаратахъ и микрофотографіи.

М. Таубера, въ Іенѣ.

(*Окончаніе* *).

III.

Микрофотографія.

Изображенія, получаемыя въ микроскопахъ, могутъ восприниматься нами разными путями. Мы ихъ можемъ, во-первыхъ, непосредственно, субъективно разсматривать въ самомъ же микроскопѣ; далѣе, мы ихъ можемъ отрисовывать съ помощью особыхъ „*рисовальныхъ аппаратовъ*“ (Zeichenapparate) при микроскопахъ; такъ какъ при этомъ рисунки могутъ производиться въ тѣхъ же цвѣтахъ, въ какихъ представляется самъ препаратъ, то при хорошемъ исполненіи ихъ дана, такимъ образомъ, возможность лицамъ, не имѣющимъ микроскоповъ, наблюдать интересующіе ихъ препараты въ увеличенномъ видѣ и натуральныхъ цвѣтахъ. Въ соединеніи съ эпидіоскопомъ можно затѣмъ микроскопныя изображенія проектировать на экранѣ, что позволяетъ

*) См. № 352 „Вѣстника“.

многимъ лицамъ въ одно и то же время наблюдать въ увеличенномъ видѣ какой-нибудь весьма небольшой препаратъ. Изображенія въ микроскопахъ можно, наконецъ, фотографировать; въ этомъ случаѣ дѣлаются замѣтными такія детали, какія не обнаруживаются при субъективномъ разсматриваніи изображеній. Для объясненія этого интереснаго и важнаго процесса приведемъ нижеслѣдующее.

Для современной практической оптики недостаточно обыкновеннаго предположенія, что свѣтъ состоитъ изъ лучей. До тѣхъ поръ, пока оперировали надъ одними только лучами, оптика подвигалась медленно впередъ; приходилось ограничиваться одними приближеніями, и всѣ изслѣдованія, какъ и вычисленія, приводили только къ болѣе или менѣе поверхностнымъ результатамъ. Къ тому же, всѣ эти изслѣдованія были *дѣйствительны* только въ теоретическомъ смыслѣ, такъ какъ они могли производиться только надъ каждымъ лучемъ въ отдѣльности; отдѣльныхъ же лучей, по законамъ дифракціи, нѣтъ. За лучемъ свѣта можно въ нѣкоторой степени признать его „дѣйствительное" существованіе только *внутри* пучка лучей съ *конечнымъ* расходящимся угломъ. При стремленіи же выдѣлить изъ пучка *одинъ единственный* лучъ, онъ перестаетъ существовать.

Болѣе глубокое и всестороннее изслѣдованіе разныхъ вопросовъ практической оптики достигается черезъ примѣненіе теоріи свѣтовыхъ волнъ. Эти послѣднія, какъ извѣстно, чрезвычайно малыхъ размѣровъ и для разныхъ цвѣтовъ имѣютъ различную длину, такъ что длина свѣтовой волны вполнѣ характеризуетъ родъ свѣта, т. е. цвѣтъ.

Съ этой точки зрѣнія и объяснимъ интересующій насъ вопросъ.

Отъ микроскопа требуется не только, чтобы онъ при извѣстномъ увеличеніи давалъ ясныя и совершенно подобныя изображенія разсматриваемыхъ предметовъ, но отъ него еще требуется, чтобы изображенія оставались такими же ясными и подобными при измѣненіи увеличенія въ одну или другую сторону. Въ этомъ смыслѣ можно доводить увеличенія микроскопа только до опредѣленнаго, непреодолимаго предѣла; у этого предѣла мы находимся, когда частицы предмета становятся такими маленькими, что онѣ дѣлаются по величинѣ равными свѣтовымъ волнамъ примѣняемаго свѣта. При дальнѣйшемъ повышеніи увеличенія, становятся неизбѣжными явленія дифракціи и интерференціи, которыя отуманиваютъ, раскрашиваютъ (при бѣломъ освѣщеніи) и совершенно искажаютъ изображенія.

Чѣмъ короче поэтому свѣтовыя волны примѣняемаго свѣта, тѣмъ меньшія частички мы въ состояніи различать. На этомъ основаніи, слѣдуетъ при микроскопическихъ изслѣдованіяхъ примѣнять свѣтъ, соотвѣтствующій возможно малой свѣтовой волнѣ. Съ синимъ свѣтомъ можно поэтому достигнуть лучшихъ результатовъ, чѣмъ съ краснымъ; съ фіолетовымъ—лучшихъ, чѣмъ

съ синимъ. Наилучшіе результаты достигаются, конечно, при примѣненіи ультрафіолетовыхъ лучей, такъ какъ ихъ свѣтовыя волны меньше свѣтовыхъ волнъ синихъ и фіолетовыхъ лучей. Ультра-фіолетовые лучи не производятъ на нашъ глазъ никакого впечатлѣнія; на фотографическую же пластинку они, однако, сильно дѣйствуютъ.

Отсюда и слѣдуетъ, что фотографическимъ путемъ получаются болѣе детальныя изображенія, чѣмъ при непосредственныхъ наблюденіяхъ.

Увеличеніе микроскопа находится въ связи съ его разъединяющею способностью, т. е. съ способностью представлять разъединенныя частички дѣйствительно разъединенными.

Гельмгольцъ [1]) и Аббе [2]) нашли теоретическимъ путемъ, что для разъединяющей способности микроскоповъ существуетъ вполнѣ опредѣленный предѣлъ. По ихъ вычисленіямъ, этотъ предѣлъ равняется для фіолетовыхъ лучей, при центральномъ освѣщеніи посредствомъ узкихъ конусовъ свѣта, приблизительно $\frac{1}{4000}$ мм., т. е. съ помощью микроскоповъ можно достигнуть въ предѣлѣ только того, чтобы видѣть при вышеуказанныхъ условіяхъ частички, находящіяся на разстояніи $\frac{1}{4000}$ мм., дѣйствительно разъединенными. Если же примѣнять косое освѣщеніе или также центральное освѣщеніе посредствомъ конусовъ свѣта съ отверстіемъ въ 180°, то можно фотографическимъ путемъ съ помощью фіолетовыхъ лучей, соотвѣтствующихъ длинѣ волны $\lambda = 0{,}0004$, разъединять частички, находящіяся даже на разстояніи $\frac{1}{8000}$ мм. Это и есть для фіолетовыхъ лучей крайній предѣлъ, дальше котораго по *Аббе* и *Гельмгольцу* идти нельзя, и дальнѣйшее улучшеніе микроскоповъ относительно ихъ разъединяющей способности лежитъ поэтому, согласно выводамъ этихъ ученыхъ, внѣ всякой возможности.

Предѣлъ этотъ удалось, однако, въ настоящее время перешагнуть.

Недавно *Зидентопфъ* и *Цзигмонди* [3]) въ Іенѣ выработали новый методъ, съ помощью котораго дѣлаются замѣтными чрезвычайно маленькія тѣльца, какъ, напримѣръ, частички золота въ такъ

---

[1]) *H. v. Helmholtz*. I. „Ueber die Grenze der Leistungsfähigkeit der Mikroskope" Berichte d. Akademie der Wiss. zu Berlin 1873,—II. „Die theoretische Grenze für die Leistungsfähigkeit der Mikroskope". Pogg. Ann. 1874 p 557 до 584.

[2]) *E. Abbe*. „Beiträge zur Theorie des Mikroskops und der mikroskopischen Wahrnehmung". Archiv f. mikr. Anatomie, April 1874.

[3]) *Siedentopf u. Zsigmondy*. Ueber Sichtbarmachung und Grössenbestimmung ultramikrosk. Teilchen, mit besonderer Anwendung auf Goldrubingläser. Annalen der Physik, Leipzig. Томъ 10. 1903 г.

называемыхъ колоидальныхъ золотыхъ растворахъ, несмотря на то, что эти частички и разстоянія между ними находятся внѣ предѣла, установленнаго Аббе и Гельмгольцемъ.

Центръ тяжести этого метода лежитъ въ особомъ распредѣленіи освѣщенія.

Такъ какъ частички, принимаемыя при микроскопическихъ наблюденіяхъ въ соображеніе, не самосвѣтящи или свѣтятъ съ чрезвычайно незначительною яркостью, то мы принуждены, чтобы сдѣлать ихъ замѣтными, примѣнять сильное искусственное освѣщеніе. Лучи свѣта падаютъ тогда на частички, отклоняются отъ нихъ и проходятъ затѣмъ въ микроскопъ, гдѣ получается интересное дифракціонное явленіе, *слѣдствіемъ* котораго и является изображеніе этихъ частичекъ. Эти изображенія тѣмъ яснѣе, чѣмъ больше дифракціонныхъ и чѣмъ меньше освѣтительныхъ лучей проходитъ въ микроскопъ, при чемъ требованіе это должно тѣмъ строже соблюдаться, чѣмъ меньше изображаемыя частички.

Поэтому, чтобы сдѣлать замѣтными весьма маленькія частички, нужно прежде всего такъ распредѣлить освѣщеніе, чтобы въ дифракціонный конусъ лучей, по направленію которыхъ переносится свѣтовая энергія отъ частичекъ къ ихъ изображеніямъ, не попалъ ни одинъ изъ освѣтительныхъ лучей.

При такомъ распредѣленіи освѣщенія мы будемъ видѣть ярко-освѣщенныя частички на совершенно темномъ фонѣ.

Этого, однако, нельзя достигнуть при обыкновенныхъ способахъ освѣщенія, такъ какъ цѣлая масса рефлексовъ, происходящихъ на поверхностяхъ кондензора (освѣтительнаго аппарата) и объектива микроскопа, способствуетъ проникновенію множества лучей въ дифракціонный конусъ.

Всѣ эти вредные рефлексы устраняются, и въ дифракціонный конусъ не попадаетъ, такимъ образомъ, ни одинъ изъ освѣтительныхъ лучей, если давать освѣщенію такое распредѣленіе, чтобы ось освѣтительнаго конуса была перпендикулярна къ оси дифракціоннаго конуса и чтобы оба конуса не пересѣкались между собою. (См. 9).

Въ выработкѣ этого новаго способа освѣщенія и въ прекрасномъ его примѣненіи для микроскопическаго изслѣдованія разныхъ растворовъ и состоитъ высокая заслуга Зидентопфа и Цзигмонди.

Но слѣдуетъ нѣсколько оговориться.

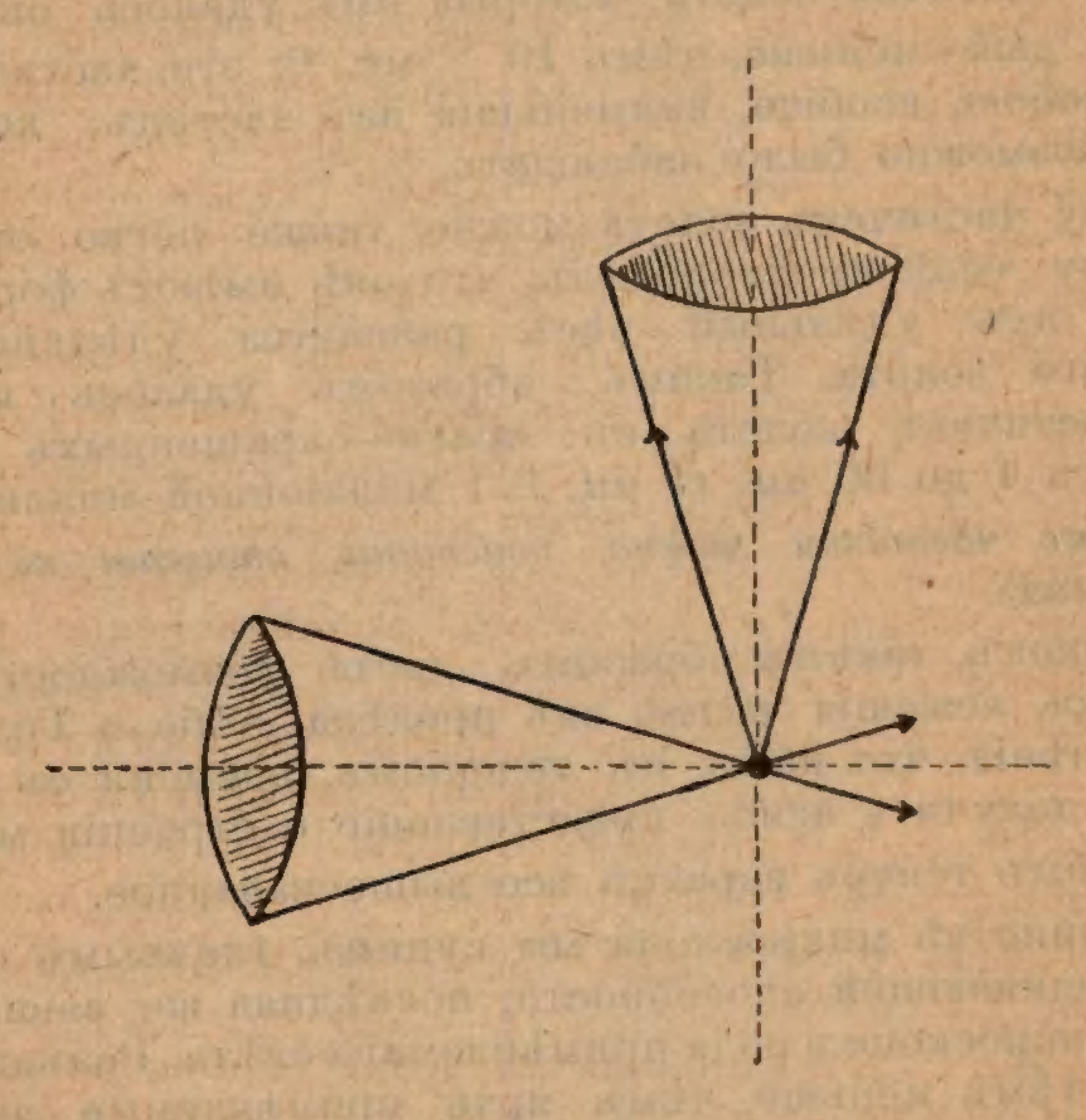
Этотъ новый способъ освѣщенія даетъ намъ *только* возможность убѣждаться *въ существованіи* въ изслѣдуемыхъ растворахъ частичекъ, лежащихъ внѣ вышеуказаннаго предѣла. Относительно же ихъ деталей и конструкціи мы, однако, не получаемъ никакого представленія.

Мы видимъ не самыя частички, но соотвѣтствующіе имъ дифракціонные кружки, происхожденіе которыхъ становится

яснымъ, если, напримѣръ, предположить, что эти частички меньше половинной длины свѣтовой волны.

Такимъ частичкамъ дано названіе *ультра-микроскопическихъ частичекъ*, чѣмъ желаютъ выразить, что въ нихъ съ помощью микроскопа деталей и структуръ наблюдать невозможно.

Казалось бы, что весь этотъ новый методъ не даетъ почти ничего, что могло бы хотя нѣсколько характеризовать интересующія насъ частички и что, поэтому, всѣ изслѣдованія съ помощью его оказываются совершенно безцѣльными и излишними. Однако, изслѣдованія, произведенныя надъ стеклами, содержащими золото въ различнѣйшихъ состояніяхъ, показали, что этотъ методъ даетъ не только возможность убѣждаться въ *существованіи* золо-



Фиг. 9.

тыхъ частичекъ въ изслѣдуемыхъ стеклахъ, но онъ даетъ также полное представленіе о распредѣленіи, цвѣтѣ, яркости и поляризаціонномъ состояніи этихъ частичекъ; дальнѣйшія изслѣдованія въ жидкихъ массахъ показали, что по роду движенія дифракціонныхъ кружковъ можно получить достаточно признаковъ для *нѣкоторой* научной характеристики изслѣдуемыхъ частичекъ.

Вообще, этотъ методъ обѣщаетъ многое и не мало пользы принесетъ онъ медицинѣ, ботаникѣ и другимъ наукамъ, въ которыхъ микроскопъ является, такъ сказать, посредникомъ для разныхъ великихъ открытій.

Чтобы дать болѣе ясное понятіе о чрезвычайно малой ве-

личинѣ частичекъ, существованіе которыхъ описанный родъ освѣщенія въ состояніи доказать, приведемъ слѣдующій примѣръ.

Положимъ, что „Rubinglas" содержитъ въ одномъ кубическомъ миллиметрѣ 80 милліонныхъ миллиграмма золота и что разстояніе между частичками золота равно цѣлой длинѣ свѣтовой волны; тогда выходитъ, что въ одномъ кубическомъ миллиметрѣ находится 1 000 000 000 (одинъ милліардъ) частичекъ; вѣсъ каждой частички, такимъ образомъ, равняется

$$\frac{80}{1.000\,000 \times 1\,000\,000\,000} \text{ миллиграмма.}$$

На самомъ дѣлѣ Зидентопфъ и Цзигмонди насчитывали въ каждомъ кубическомъ миллиметрѣ по нѣсколько милліардовъ частичекъ золота, такъ что каждая частичка вѣситъ еще меньше. Наименьшія частички золота, которыя имъ удалось еще наблюдать, вѣсили даже меньше, чѣмъ 10^{-15} мг. [4]); эти частички представляютъ собою, вообще, наименьшія изъ частицъ, которыя до сихъ поръ возможно было наблюдать.

По вѣсу частичекъ золота можно также легко опредѣлить ихъ величину, если предположить, что онѣ имѣютъ форму кубиковъ и что ихъ удѣльный вѣсъ равняется удѣльному вѣсу обыкновеннаго золота. Такимъ образомъ удалось найти, что діаметръ частичекъ золота въ красно-окрашенныхъ стеклахъ равняется отъ 4 до 30 $\mu\mu$. (1 $\mu\mu$. = 1 милліонной миллиметра).

Такія же частички можно, поистинѣ, отнести къ категоріи безконечно-малыхъ.

Микроскопъ, такимъ образомъ, даетъ возможность наблюдать частички, лежащія *далеко* внѣ предѣла Аббе и Гельмгольца и нѣтъ сомнѣнія, что намъ съ теченіемъ времени съ помощью его удастся получить ясное представленіе о строеніи матеріи.

Повторимъ теперь вкратцѣ все вышесказанное.

О достоинствѣ микроскопа мы судимъ, главнымъ образомъ, по его разъединяющей способности; послѣдняя же зависитъ отъ увеличенія микроскопа и рода примѣняемаго свѣта. Разъединяющая способность тѣмъ меньше, чѣмъ ярче примѣняемые лучи и наоборотъ; поэтому, она меньше при непосредственныхъ наблюденіяхъ, чѣмъ при дѣйствіяхъ на чувствительную пластинку; на послѣднюю дѣйствуютъ болѣе темные лучи солнечнаго спектра, т. е. фіолетовые и ультрафіолетовые, между тѣмъ какъ глазъ работаетъ, главнымъ образомъ, желтозелеными лучами.

Изображенія, поэтому, тѣмъ подобнѣе и яснѣе, чѣмъ болѣе преломляемъ свѣтъ, примѣняемый при изслѣдованіяхъ. Отсюда и

[4]) Съ помощью спектральныхъ анализовъ можно было наблюдать $0{,}14 \times 10^{-6}$ мг. Na (Кирхгофъ и Бунзенъ) и 7×10^{-14} мг. водорода (Эмихъ), и обоняніемъ можно еще воспринимать 10^{-11} мг. іодоформа (Бертело).

ясно высокое значеніе *микрофотографіи:* послѣдняя, работаетъ сильно преломляемыми лучами и даетъ, такимъ образомъ, возможность, черезъ пр..мѣненіе болѣе сильныхъ увеличеній, обнаруживать болѣе мелкія детали, чѣмъ при непосредственныхъ наблюденіяхъ.

По Аббе и Гельмгольцу можно, какъ мы видѣли, улучшать микроскопы относительно ихъ увеличительной, слѣдовательно, и разъединяющей способности только до вполнѣ опредѣленнаго предѣла. Только до этого предѣла можно, дѣйствительно, получать при наблюденіяхъ глазомъ или, въ крайнемъ случаѣ, съ помощью микрофотографіи изображенія, свободныя отъ дифракціи и интерференціи, и только до него можно по изображеніямъ получать *полное* представленіе о самомъ предметѣ. Можно, однако, какъ мы видѣли далѣе, посредствомъ особаго распредѣленія освѣщенія, заходить и за этотъ предѣлъ, но изображеній, *подобныхъ* предметамъ, мы *ни въ какомъ случаѣ* получать не можемъ, такъ какъ предметныя точки даютъ въ изображеніи уже не точки, а маленькіе дифракціонные кружки Мы, конечно, по этимъ кружкамъ можемъ доказывать существованіе чрезвычайно маленькихъ частичекъ, мы даже можемъ при дальнѣйшемъ изученіи этихъ кружковъ отыскивать такія признаки, которые въ состояніи болѣе или менѣе охарактеризовать родъ изслѣдуемыхъ частичекъ, но полнаго, нагляднаго представленія о конструкціи и деталяхъ послѣднихъ мы получать не можемъ,—таковаго, надо полагать, никогда и не получимъ.

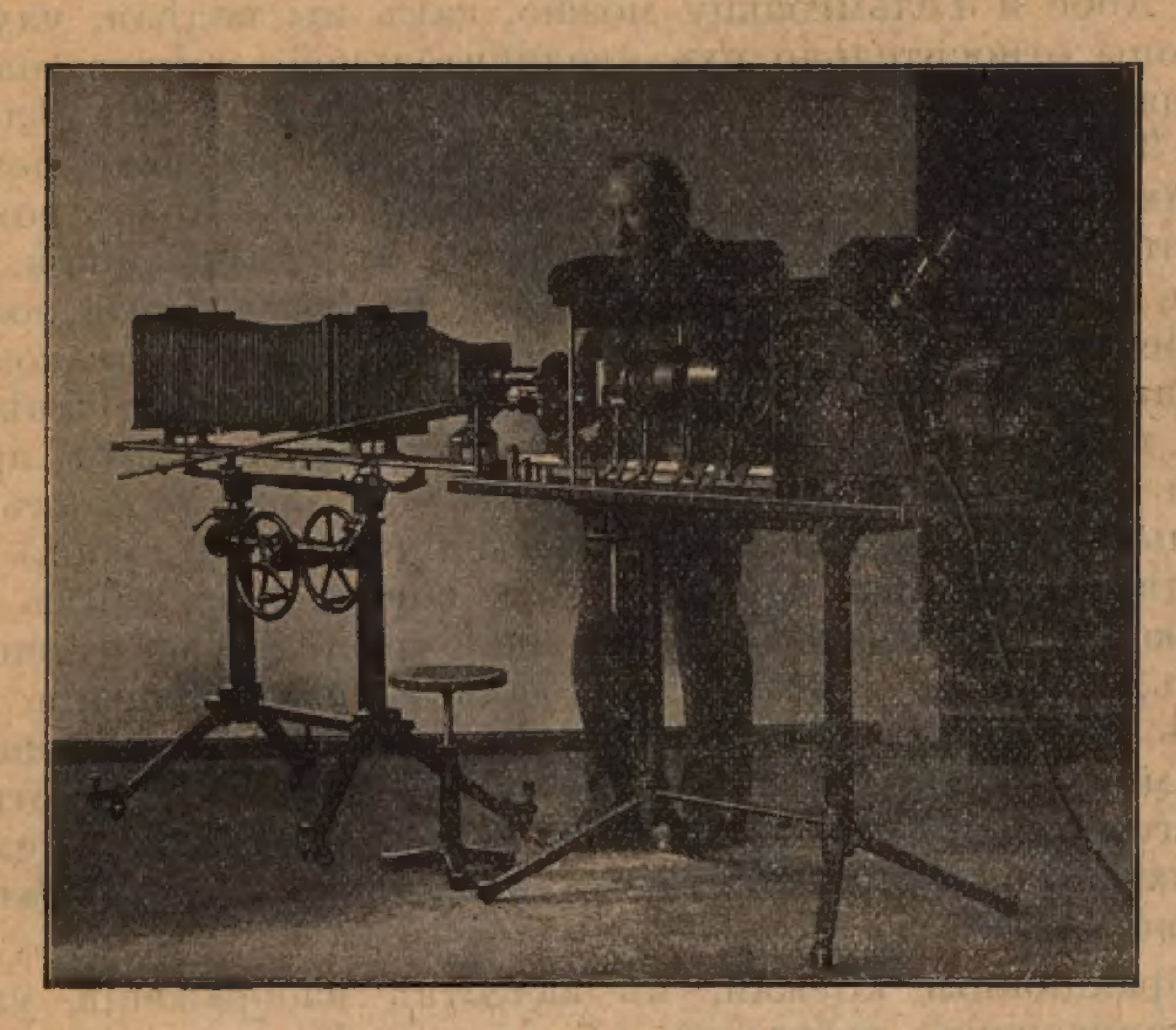
Дифракціонные кружки, въ качествѣ изображеній ультрамикроскопическихъ частичекъ, будутъ, вѣроятно, играть въ микроскопіи приблизительно такую же роль, какъ спектральныя линіи при спектральныхъ анализахъ.

Аппараты, употребляемые при микрофотографіи, состоятъ изъ освѣтительнаго аппарата, микроскопа и фотографической камеры; новѣйшіе изъ нихъ можно примѣнять въ горизонтальномъ или вертикальномъ направленіи, а потому они и названы *„горизонтально-вертикальными камерами.*

На фигурѣ 10-ой представленъ аппаратъ въ горизонтальномъ положеніи. Освѣщеніе препарата производится посредствомъ лампы, помѣщенной въ фокусѣ увеличительнаго стекла; свѣтъ поэтому исходитъ изъ послѣдняго въ видѣ пучка параллельныхъ лучей; лучи эти падаютъ на освѣтительный аппаратъ и, по прохожденіи послѣдняго, освѣщаютъ затѣмъ фотографируемый препаратъ. Къ увеличительному стеклу придѣлана діафрагма, которую обыкновенно такъ устраиваютъ, что можно по произволу мѣнять діаметръ пропускаемаго пучка лучей.

Изображеніе, получаемое отъ сильно освѣщеннаго препарата, проектируется на матовое стекло, гдѣ его увеличенное и

обратное изображенiе и можетъ разсматриваться сразу нѣсколькими наблюдателями. Препаратъ на столикѣ микроскопа передвигаютъ затѣмъ до тѣхъ поръ, пока его изображенiе на матовомъ стеклѣ не приметъ желаемаго положенiя, и измѣняютъ длину камеры настолько, чтобы изображенiе сдѣлалось совершенно яснымъ.

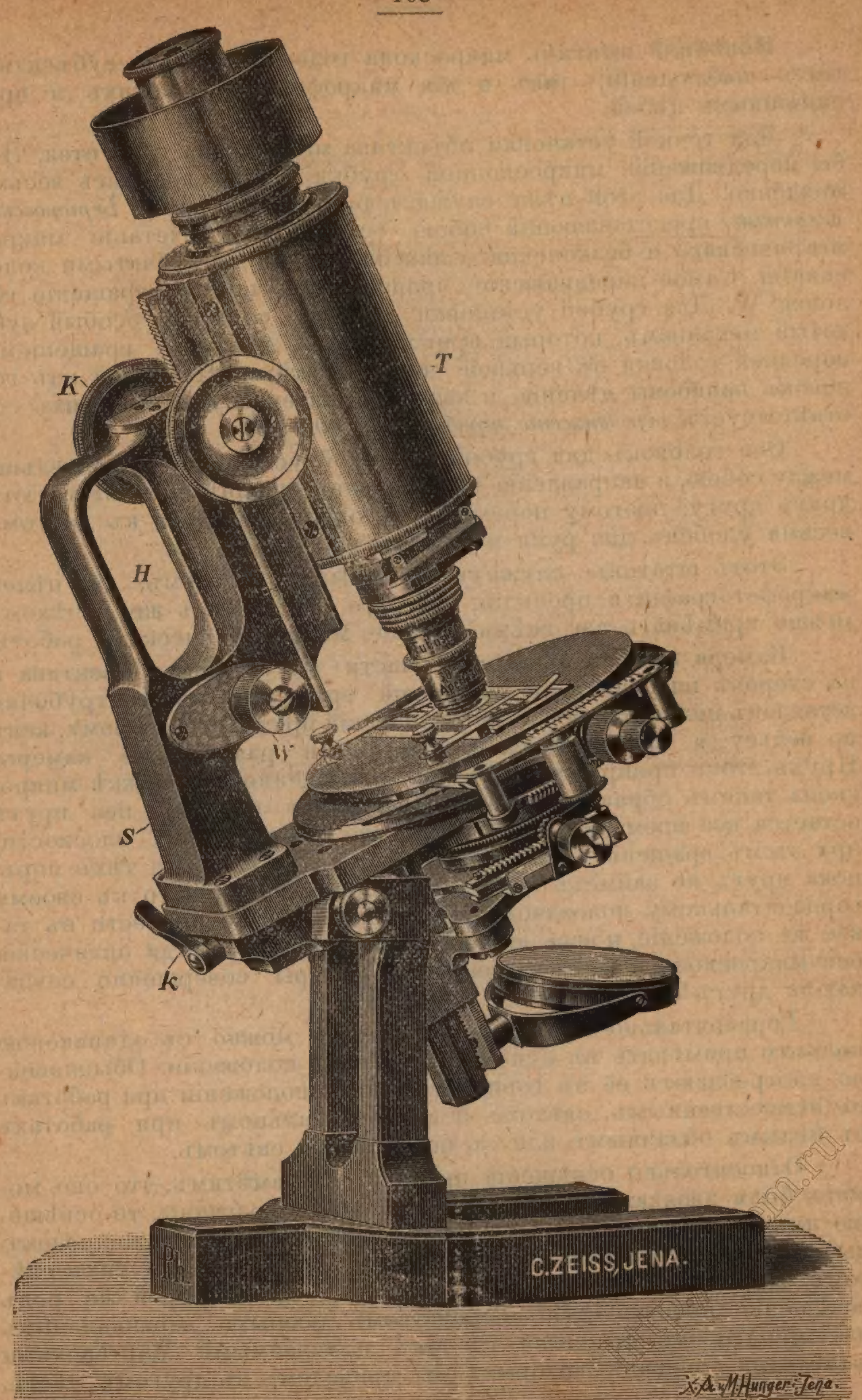


Фиг. 10
Горизонтально-вертикальная камера.

Когда все это достигнуто, то вынимаютъ матовое стекло и вмѣсто него вставляютъ чувствительную пластинку; на послѣдней и отпечатывается тогда, послѣ нѣкоторой экспозицiи, изображенiе препарата.

На чертежѣ 11-мъ представленъ штативъ микроскопа отдѣльно.

Для цѣлей микрофотографiи и проекцiи весьма желательно, чтобы передвиженiя препарата совершались чрезвычайно медленно и чтобы, кромѣ того, столикъ микроскопа могъ легко вращаться вокругъ оптической оси послѣдняго. Этимъ двумъ требованiямъ вполнѣ удовлетворяетъ такъ называемый *микрофотографическiй столикъ Цейсса* (средняя часть фигуры 11). Передвиженiя препарата производятся на этомъ столикѣ по двумъ перпендикулярнымъ направленiямъ и при томъ по каждому изъ нихъ на 10 мм.; по тѣмъ же направленiямъ расположены нонiусы, которые даютъ возможность измѣрять съ большою точностью самыя незначительныя передвиженiя препарата.



Фиг. 11.

Новѣйшій штативъ микроскопа годенъ какъ для субъективныхъ наблюденій, такъ и для микрофотографическихъ и проекціонныхъ цѣлей.

Для точной установки объектива микроскопа требуется, чтобы передвиженія микроскопной трубки Т производились весьма медленно. Для этой цѣли служитъ такъ называемый *Бергеровскій механизмъ*, представляющій собою остроумное сочетаніе микрометрическаго и безконечнаго винтовъ съ двумя зубчатыми колесиками. Самое передвиженіе производится черезъ вращеніе головки W. Для грубой установки трубки служитъ особый зубчатый механизмъ, который приводится въ движеніе вращеніемъ передней головки въ верхней части штатива. На одной изъ головокъ нанесены дѣленія, и каждому интервалу послѣднихъ соотвѣтствуетъ *передвиженіе трубки на 0,002 мм.*

Оси головокъ для грубой и точной установки параллельны между собою, и направленія ихъ вращенія вполнѣ соотвѣтствуютъ другъ другу; поэтому переходъ отъ одного движенія къ другому весьма удобенъ для руки наблюдателя.

Этотъ штативъ служитъ, главнымъ образомъ, для цѣлей микрофотографіи и проекціи, но его съ такимъ же успѣхомъ можно примѣнять для всѣхъ, вообще, микроскопическихъ работъ.

Камера имѣетъ въ нижней части на сторонѣ объектива и на сторонѣ пластинки по маленькой трубочкѣ; въ эти трубочки вставленъ цилиндрическій металлическій прутъ, по которому, какъ по рельсу, и производится сдвиженіе и раздвиженіе камеры. Прутъ этотъ прикрѣпленъ къ оси, помѣщенной на ножкѣ микроскопа такимъ образомъ, что при вращеніи вокругъ нея прутъ остается все время въ одной и той же вертикальной плоскости; при этомъ вращеніе можетъ продолжаться только до тѣхъ поръ, пока прутъ не займетъ положенія, перпендикулярнаго къ своему горизонтальному положенію. Микроскопъ можно привести въ такое же положеніе, и весь аппаратъ установленъ, когда оптическія оси микроскопа и фотографической камеры совершенно совпадаютъ другъ съ другомъ.

Горизонтально-вертикальную камеру можно съ одинаковою пользою примѣнять въ одномъ и другомъ положеніи. Обыкновенно употребляютъ её въ горизонтальномъ положеніи при работахъ съ искусственнымъ свѣтомъ и въ вертикальномъ при работахъ съ бѣлымъ облачнымъ или съ солнечнымъ свѣтомъ.

Относительно освѣщенія препаратовъ замѣтимъ, что оно можетъ быть двоякаго рода; если препараты прозрачны, то освѣщеніе ихъ должно производиться пропущеннымъ свѣтомъ; непрозрачные же препараты должны овсѣщаться падающимъ на нихъ свѣтомъ. Первый родъ освѣщенія описанъ выше; второй же родъ освѣщенія производится посредствомъ особыхъ вертикальныхъ иллюминаторовъ въ связи съ такъ называемыми Мартенскими штативами, описаніе которыхъ мы приведемъ въ другомъ мѣстѣ.

На фиг. 12 представленъ маленькій паучекъ, снятый въ отраженномъ свѣтѣ.



Фиг. 12.
Паучекъ, снятый микрофотографическимъ аппаратомъ.

Въ заключеніе упомянемъ еще о, такъ называемой, *передвижной касетѣ*, которая служитъ для опредѣленія экспозиціоннаго времени. Какъ извѣстно, экспозиція должна продолжаться столько времени, пока не получится полное и совершенно ясное изображеніе препарата; для опредѣленія этого времени и придумана передвижная касета. Съ помощью послѣдней можно нѣсколько разъ подрядъ фотографировать на одной и той же пластинкѣ при разныхъ временахъ экспозиціи какую-нибудь часть изображенія, напримѣръ, полоску, шириною приблизительно въ 2 см.; по этимъ полоскамъ, лежащихъ другъ подлѣ друга, и можно тогда легко опредѣлить самое благопріятное экспозиціонное время, котораго и нужно придерживаться при фотографированіи на совершенно подобныхъ пластинкахъ при томъ же освѣщеніи.

Величина пластинокъ можетъ, въ крайнемъ случаѣ, доходить до 25 × 25 см.

Объемъ шара и его частей.

К. Пеніонжкевича въ Екатеринбургѣ.

Во всѣхъ элементарныхъ учебникахъ по геометріи доказательства формулъ, служащихъ для опредѣленія объема шара и его частей, довольно сложны и искусственны, и при этомъ вниманіе учащагося постоянно отвлекается отъ главнаго трактуемаго вопроса. Нижеизложенный способъ лишенъ этого недостатка. Здѣсь главный вопросъ всегда стоитъ предъ глазами ученика, который видитъ ясно свою конечную цѣль.

Выводъ изложенныхъ теоремъ основывается на пониманіи неравенствъ алгебраическаго характера, доказательство которыхъ приводится отдѣльно въ видѣ леммы. *)

1. **Лемма**. Если n—число цѣлое и положительное, которое можетъ безпредѣльно увеличиваться, то выраженіе

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}$$

имѣетъ предѣломъ $\frac{1}{3}$.

Въ самомъ дѣлѣ, обозначая черезъ a—число цѣлое и положительное, имѣемъ:

$$\frac{(a+1)^3-a^3}{3}>a^2>\frac{a^3-(a-1)^3}{3}.$$

Полагаемъ послѣдовательно:

$$a=1,\quad a=2,\ldots\ldots\ldots,\ a=n-1.$$

Сложимъ почленно рядъ полученныхъ такимъ образомъ неравенствъ и, раздѣливши сумму на n^3, придемъ къ неравенству:

$$\frac{1-\frac{1}{n^3}}{3}>\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}>\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^3}{3},$$

которое доказываетъ справедливость нашего положенія.

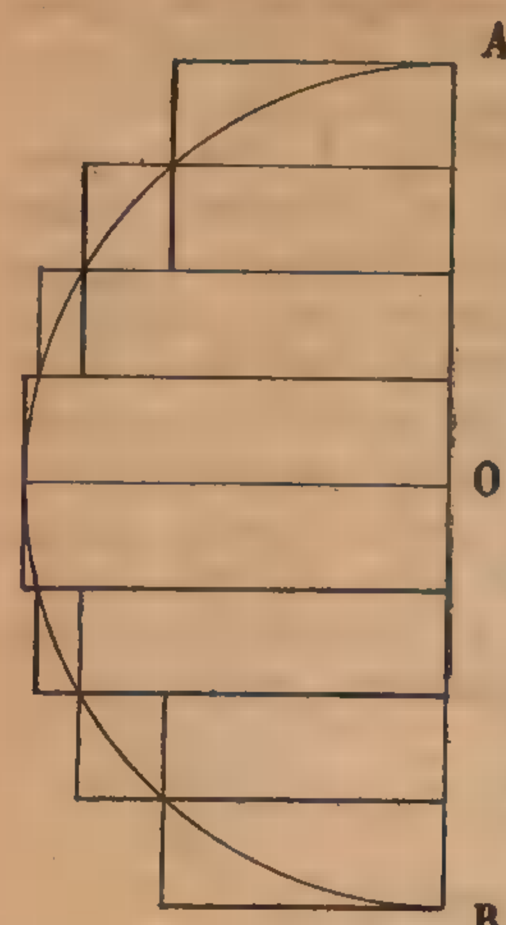
---

*) Настоящій способъ представляетъ собой элементарный выводъ значенія интеграла

$$2\pi\int_0^R (R^2-x^2)dx.$$

Прим. Ред.

2. Объемъ шара. Предположимъ, что намъ дана полуокружность съ центромъ въ точкѣ O. Діаметръ ея AB раздѣленъ на $2n$ равныхъ частей, слѣдовательно, радіусы OA и OB— каждый раздѣленъ на n равныхъ частей. Затѣмъ изъ крайнихъ точекъ A и B діаметра, изъ центра O и изъ точекъ дѣленія возставляемъ перпендикуляры къ діаметру AB. Изъ точекъ, въ которыхъ эти перпендикуляры встрѣчаютъ полуокружность, проводятъ прямыя, параллельныя діаметру AB. Образованныя такимъ образомъ фигуры вращаютъ около діаметра AB, какъ около оси. Полуокружность при вращеніи даетъ замкнутое геометрическое тѣло, называемое шаромъ, объемъ котораго будетъ заключаться между суммою объемовъ выходящихъ и входящихъ цилиндровъ. Выходящихъ цилиндровъ, очевидно, будетъ $2n$, а входящихъ $2(n-1)$.



Обозначимъ радіусъ шара черезъ R, а радіусы основаній цилиндровъ черезъ r_1, r_2, ..., r_{n-1}, гдѣ r_1—радіусъ основанія цилиндра, ближайшаго къ центру, черезъ S—сумму объемовъ выходящихъ цилиндровъ и, наконецъ, черезъ s—сумму объемовъ входящихъ цилиндровъ. Тогда

$$S = 2\pi(R^2 + r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r^2_{n-1})\frac{R}{n}$$

$$s = 2\pi(r_1^2 + r_2^2 + \ldots\ldots + r^2_{n-1})\frac{R}{n},$$

откуда

$$S - s = \frac{2\pi R^3}{n}.$$

Если n будетъ неограниченно возрастать, то первая часть послѣдняго равенства обращается въ нуль; а такъ какъ S—уменьшается, оставаясь постоянно больше объема шара, а s—увеличивается, оставаясь все время меньше его, то ясно, что объемъ V шара будетъ общимъ предѣломъ двухъ перемѣнныхъ суммъ S и s при неограниченномъ возрастаніи n.

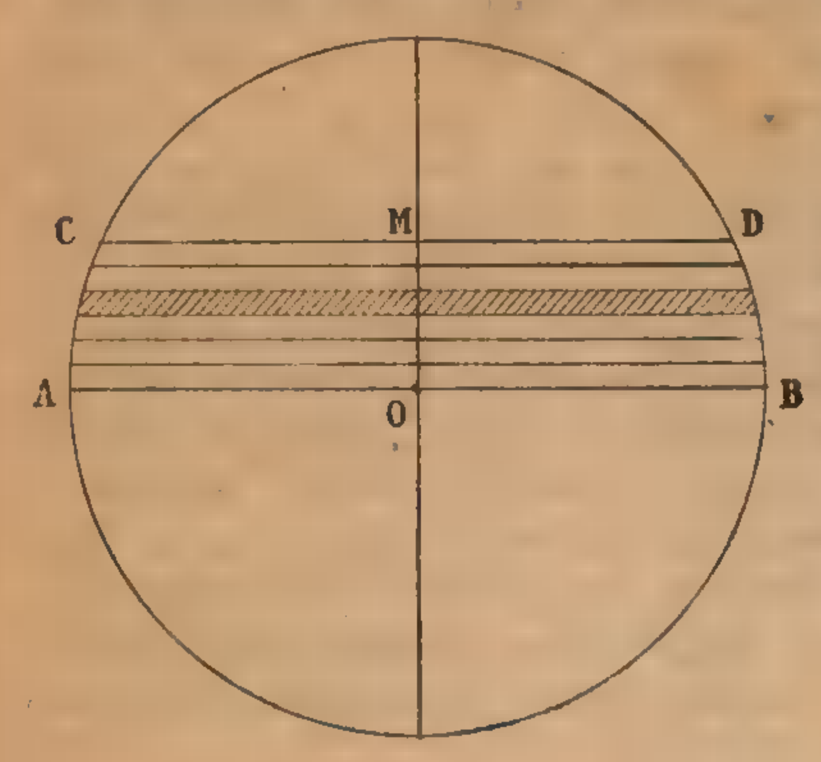
$$V = \lim_{n=\infty} S = \lim_{n=\infty}(R^2 + r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r^2_{n-1})\frac{2\pi R}{n}.$$

Но $r_1^2 = R^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$; $r_2^2 = R^2\left(1 - \frac{2^2}{n^2}\right)$; ....,$r^2_{n-1} = R^2\left(1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$.

Поэтому

$$V = \lim_{n=\infty}\left[1 - \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3}\right]2\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

3. **Объемъ шарового слоя**, одно изъ основаній котораго есть большой кругъ. Пусть шаровой или сферическій слой ABCD имѣетъ основаніемъ большой кругъ съ діаметромъ $AB=2R$, а высотой $OM=H<R$. Раздѣлимъ высоту H на n равныхъ частей и черезъ точки дѣленій проведемъ плоскости, параллельныя основаніямъ. Такимъ образомъ данный шаровой слой разбивается на n-шаровыхъ слоевъ. Обозначимъ черезъ V_p — объемъ p-го слоя, считая порядокъ p слоевъ отъ центра шара, черезъ r_{p-1} и r_p—радіусы его основаній. Очевидно, что



$$\pi r^2_{p-1}\frac{H}{n} > V_p > \pi r^2_p \frac{H}{n}.$$

Но $r^2_{p-1}=R^2-\frac{(p-1)^2H^2}{n^2}$ и $r^2_p=R^2-\frac{p^2H^2}{n^2}$,

такъ какъ разстоянія основаній p-го шарового слоя отъ центра шара равны $(p-1)\frac{H}{n}$ и $p\frac{H}{n}$.

Поэтому:

$$\pi\left[R^2-\frac{(p-1)^2H^2}{n^2}\right]\frac{H}{n} > V_p > \pi\left[R^2-\frac{p^2H^2}{n^2}\right]\frac{H}{n}.$$

Придавая p соотвѣтственно значенія 1, 2, 3, ..., n и затѣмъ складывая почленно полученный рядъ неравенствъ, приходимъ, наконецъ, къ окончательному неравенству:

$$\pi R^2H-\pi H^3\left[\frac{1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}\right] > V > \pi R^2H-$$

$$-\pi H^3\left[\frac{1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}+\frac{1}{n}\right].$$

Если станемъ n—увеличивать безпредѣльно, то первая и третья части двойного неравенства стремятся къ общему предѣлу:

$$\pi R^2H-\frac{\pi H^3}{3}$$

первая—постоянно уменьшаясь, а третья—постоянно увеличиваясь. Поэтому

$$V=\pi R^2H-\frac{\pi H^3}{3}.$$

4. **Объемъ шароваго слоя.** Пусть CDC'D' будетъ шаровой слой, имѣющій высоту h и радіусы основаній r и r'; обозначимъ, кромѣ того, черезъ ρ—радіусъ средняго сѣченія слоя и черезъ λ—разстояніе $O\omega$ отъ центра шара до плоскости средняго сѣченія слоя. Если AB — діаметръ большого круга, параллельнаго основаніямъ слоя, то

$$V(CDC'D') = V(ABCD) - \rho V(ABC'D'),$$

гдѣ $\rho = \pm 1$, смотря по тому, будутъ ли плоскости CD и C'D' лежать по одну сторону отъ центра или по разныя стороны отъ него.

Но

$$V(ABCD) = \pi R^2 \left(\lambda + \frac{h}{2}\right) - \frac{\pi}{3}\left(\lambda + \frac{h}{2}\right)^3$$

$$\rho V(ABC'D') = \pi R^2 \left(\lambda - \frac{h}{2}\right) - \frac{\pi}{3}\left(\lambda - \frac{h}{2}\right)^3.$$

Разность ихъ даетъ

$$V(CDC'D') = \pi R^2 h - \frac{\pi}{3}\left(3\lambda^2 h + \frac{h^3}{4}\right) = \pi(R^2 - \lambda^2)h - \frac{\pi h^3}{12}.$$

А такъ какъ $\rho^2 = R^2 - \lambda^2$, то окончательно получимъ:

$$V(CDC'D') = \pi\rho^2 h - \frac{\pi h^3}{12}, \quad — \qquad (1)$$

формула, данная для шарового слоя Mac-Laurin'омъ [1]).

Изъ этой формулы можно получить еще два другихъ общеизвѣстныхъ вида формулы для вычисленія объема шарового слоя.

Изъ чертежа получаемъ:

$$r^2 = R^2 - \left(\lambda + \frac{h}{2}\right)^2$$

$$r'^2 = R^2 - \left(\lambda - \frac{h}{2}\right)^2.$$

---

[1]) Другой выводъ этой формулы данъ въ книгѣ:
B. Niewenglowski et L. Gérard. Géométrie dans l'espace. Paris 1899, стр. 173.

Складываемъ почленно эти выраженія:

$$r^2+r'^2=2(R^2-\lambda^2)-\frac{h^2}{2}=2\rho^2-\frac{h^2}{2},$$

откуда

$$\rho^2=\frac{r^2+r'^2}{2}+\frac{h^2}{4}.$$

Вставляемъ значеніе ρ^2 въ уравненіе (1):

$$V(CDC'D')=\frac{\pi}{2}(r^2+r'^2)h+\frac{\pi h^3}{6}, \text{ — } \quad (2).$$

формула въ томъ видѣ, въ какомъ она обыкновенно дается въ руководствахъ.

Умножаемъ уравненіе (1) на 2 и складываемъ съ уравненіемъ (2). Тогда получимъ:

$$3V(CDC'D')=\pi h\left[\frac{r^2+r'^2}{2}+2\rho^2\right],$$

откуда

$$V(CDC'D')=\frac{h}{6}\left[S+S'+4\sigma\right], \quad (3)$$

гдѣ S и S' обозначаютъ площади основаній слоя, а σ — площадь его средняго сѣченія.

Примѣчаніе 1. Изъ формулы (1) слѣдуетъ, что объемы шарового слоя и цилиндра, имѣющаго ту же высоту, а основаніемъ среднее сѣченіе слоя, разнятся на половину объема шара, имѣющаго діаметромъ высоту слоя.

Примѣчаніе 2. Формула (3) имѣетъ тотъ же видъ, что и формула, служащая для вычисленія объема призматоида [2]).

Кромѣ того, тотъ же видъ имѣютъ формулы, служащія для опредѣленія объемовъ тѣлъ, которыя ограничены двумя параллельными основаніями и такою боковою поверхностью, что площадь сѣченія тѣла плоскостью, параллельною основаніямъ, выражается функціею 2-ой степени ея разстоянія отъ одного изъ основаній.

5. **Объемъ сферическаго сегмента** найдется, если въ формулѣ (2) или (3) положимъ $r'=0$ и, слѣдов., $s'=0$. Поэтому

$$V=\frac{\pi r^2h}{2}+\frac{\pi h^3}{6} \quad (4)$$

$$V=\frac{h}{6}\cdot\left(s+4\sigma\right).$$

---

[2]) Вычисленіе объема призматоидовъ см. книги:

B. Niewenglowski et Gérard. Géométrie dans l'espace. 1899. Paris p. 111.

Rouché et Comberousse. Traité de Géométrie. 6-me édition. Deuxième partie. Paris 1891. p. 88.

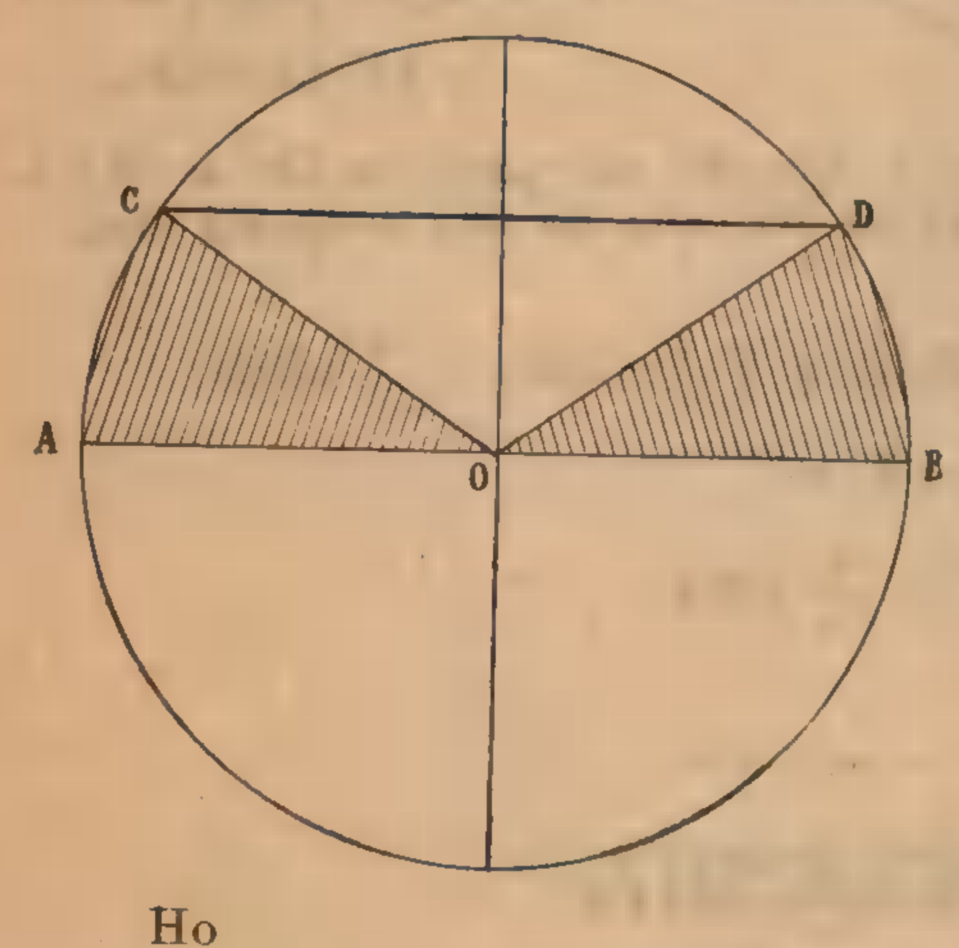
6. **Объемъ сферическаго сектора 1-го рода.** Сферическимъ секторомъ 1-го рода называется тѣло, полученное отъ вращенія кругового сектора около одного изъ своихъ конечныхъ радіусовъ. Очевидно, что для полученія объема этого сектора необходимо къ объему шарового сегмента (4) прибавить объемъ конуса, имѣющаго радіусомъ основанія r, а высотой $R - H$, т. е.

$$V = \left(\frac{\pi r^2 h}{2} + \frac{\pi h^3}{6}\right) + \frac{1}{3}\pi r^2(R - H).$$

Но $r^2 = H(2R - H)$. Вставляя значеніе r^2 въ предыдущее равенство, получаемъ извѣстную формулу:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H.$$

7. **Объемъ сферическаго сектора 2-го рода**, одинъ изъ конечныхъ радіусовъ котораго перпендикуляренъ къ оси вращенія. Сферическимъ секторомъ 2-го рода называется тѣло, полученное отъ вращенія кругового сектора около діаметра, проходящаго внѣ этого сектора. Какъ видно изъ чертежа, объемъ сферическаго сектора ACOBD равенъ объему шарового слоя ABCD безъ объема конуса, имѣющаго основаніемъ сѣченіе CD, а высотой—высоту слоя.



$$V(ACOBD) = V(ABCD) - V(COD).$$

Но

$$V(ABCD) = \pi R^2 H - \frac{\pi H^3}{3}$$

$$V(COD) = \frac{\pi r^2 H}{3} = \frac{\pi(R^2 - H^2)H}{3}.$$

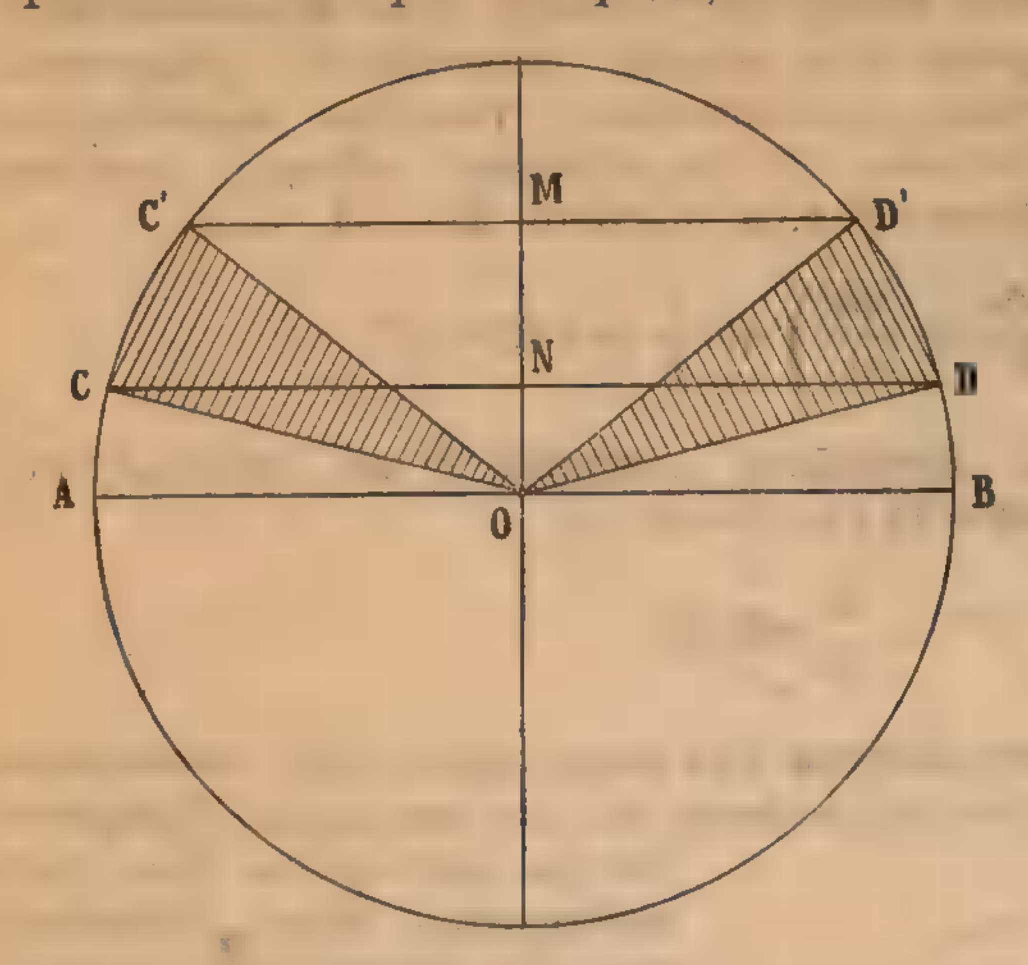
Слѣдовательно,

$$V(ACOBD) = \left(\pi R^2 H - \frac{\pi H^3}{3}\right) - \frac{\pi(R^2 - H^2)H}{3}$$

Поэтому

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H.$$

8. **Объемъ сферическаго сектора 2-го рода.** Пусть $CC'ODD'$ сферическій секторъ 2-го рода, имѣющій высоту $MN = h$. Тогда черезъ центръ O шара проводимъ плоскость, перпендикулярную къ оси вращенія. Вращая круговые секторы AOC и AOC' около діаметра, получимъ сферическіе секторы ACOBD и AC'OBD', общее основаніе которыхъ перпендикулярно къ оси вращенія, а высоты соотвѣтственно равны $ON = H_1$ и $OM = H$. Поэтому



$$V(CC'ODD') = V(AC'OBD') - \rho V(ACOBD),$$

гдѣ $\rho = \pm 1$, смотря по тому, будутъ ли радіусы OC и OC' лежать по одну сторону діаметра AB или по обѣ стороны его.

Но

$$V(AC'OBD') = \frac{2}{3}\pi R^2 H \text{ и } V(ACOBD) = \frac{2}{3}\pi R^2 H_1.$$

А такъ какъ $H - H_1 = h$, то

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

РЕЦЕНЗІИ.

Алгебра. Сборникъ задачъ, предлагавшихся на конкурсныхъ экзаменахъ въ институтахъ: Инженеровъ Путей Сообщенія, Горномъ, Технологическомъ и др. Составилъ **Владиславъ Вроблевскій.** Цѣна 90 коп. С.-П. 1902 года.

Помѣщая краткую рецензію о книгѣ В. Вроблевскаго, я хотѣлъ указать на то, какъ теперь просто и легко можно составить любой сборникъ задачъ по математикѣ: стоитъ только зайти въ публичную библіотеку въ С.-П. или въ другомъ университетскомъ городѣ, обложить себя математическими журналами и книгами (жаль только, что у насъ въ Россіи журналовъ по элементарной математикѣ только одинъ, а между тѣмъ, во Франціи, Германіи и др. имѣется до 4—5), взять по *одной* задачѣ изъ

каждаго №, и у Васъ получится довольно порядочный сборникъ задачъ. Попробуйте, напримѣръ, взять съ 1886 г. журналъ „В. О. Ф.“ и безобиднымъ образомъ возьмите по одной задачѣ, и у Васъ готовъ сборникъ въ 300 задачъ, т. е. то количество, которое имѣется у г. Вроблевскаго.

Но, чтобы книга имѣла ходъ, дайти модное названіе: „Сборникъ задачъ, предлагавшихся на конкурсныхъ экзаменахъ“, и есть полная гарантія на сбытъ.

Въ доказательство вышеизложеннаго я проставляю табличку, по которой составлены задачи г. Вроблевскимъ изъ журнала „В. О. Ф.“

№ Вробл.	№ зад. В. О. Ф.	№ Вробл.	№ зад. В. О. Ф.
1	219 1-я серія	30	427 2-я сер.
2	изъ зад. для ученик.	31	87 3-я сер.
3	275 1-я сер.	32	528 2-я сер.
4	172	33	424
5	123	34	268 2-я сер.
6	316 1-я сер.	35	519 2-я сер.
7	199	36	314 3-я сер.
8	175	37	409 2-я сер.
9	164	38	266
11	239	39	33 2-я сер.
12	262	40	238 2-я сер.
14	114	41	239 1-я сер.
15	332 1-я сер.	42	327
16	84	43	576 2-я сер.
17	162	44	110
18	78 1-я сер.	45	70 2-я сер.
19	180 1-я сер.	46	564 2-я сер.
20	182	47	217 3-я сер.
21	230	48	545
22	460	49	зад. на премію при № 52 В. О. Ф.
23	397	50	203
24	85 2-я сер.	51	524 2-я сер.
26	296	52	2-ой 3-я сер.
27	442 2-я сер.	53	148 3-я сер.
28	99		
29	242 3-я сер.		

Далѣе взяты задачи изъ „В. О. Ф.“

54 (№ 323 „В. О. Ф.“), 55 (№ 325 „В. О. Ф.“), ..., 60 (№ 322 „В. О. Ф.“), 62, 63 . . . . . . , 102, 108, 110, 117, 118 (№ 443 1-я сер.) и т. д.

При бѣгломъ просмотрѣ замѣчено, что г. Вроблевскимъ взято около $^1/_2$ задачъ, помѣщающихся въ журналѣ „В. О. Ф.“, и задачи изъ разныхъ отдѣловъ.

Задачи взяты съ полнымъ рѣшеніемъ, и ни одно выраженіе

не измѣнено, даже при № 110 добавлена историческая замѣтка цѣликомъ изъ № 198 „В. О. Ф.“ стр. 144-я.

Задача же № 49 г. Вроблевскаго, взятая изъ № 52 „В. О. Ф.“, была предложена на премію проф. В. Ермаковымъ.

Смѣло можно сказать, что подобныхъ задачъ, какъ № 49, ни проф. Ермаковъ, ни другой экзаменаторъ не предложатъ на конкурсномъ экзаменѣ въ высшее учебное заведеніе.

С. Адамовичъ (Двинскъ).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Международная Ассоціація Академій. 4-го іюня (н. ст.) текущаго года, по приглашенію президента Международной Ассоціаціи Академій, сэра Michael Forster'а, состоялось комитетское засѣданіе делегатовъ въ Лондонѣ. Главнымъ вопросомъ, обсуждавшимся на этомъ засѣданіи, была подготовка общаго собранія, которое назначено въ Лондонѣ на осень 1904 года. Между предложеніями, которыя будутъ обсуждаться на этомъ собраніи, особеннаго вниманія заслуживаетъ проектъ наблюденія магнитныхъ явленій на многочисленныхъ пунктахъ одного и того же параллельнаго круга; это предпріятіе имѣетъ цѣлью провѣрить основанія, на которыхъ покоится Gauss'ова теорія земного магнитизма. (Jahresb. d. D. Math.-Ver.).

Электрическій ударъ при 5500 вольтахъ, не повлекшій смертельнаго исхода. Въ „Neues Wiener Tageblatt“ описанъ рѣдкій случай удара, испытаннаго рабочимъ отъ трехфазной цѣпи въ 5500 вольтъ; разрядъ при этомъ продолжался въ теченіе пяти минутъ и тѣмъ не менѣе рабочій остался живъ. Повидимому, онъ не испыталъ въ результатѣ удара какихъ-либо оставшихся послѣ несчастія серьезныхъ поврежденій за исключеніемъ ожога рукъ, которыя были сожжены настолько сильно, что предполагалась неизбѣжною ихъ ампутація. Верхній слой кожи на передней и тыльной поверхности костей, рукъ и лѣваго предплечія совершенно отсталъ отъ нижняго слоя и былъ совершенно сожженъ и высохъ. Нижній слой также былъ обожженъ и потерялъ всякую чувствительность Подошва лѣваго башмака была продырявлена и мѣстами отваливалась. Пострадавшій висѣлъ въ теченіе пяти минутъ на раскаленной проволокѣ, и присутствовавшіе при этомъ утверждаютъ, что видѣли пламя, исходившее изъ его рукъ и ногъ. Докторъ Еллинекъ, дѣлавшій по этому поводу докладъ въ Австрійскомъ медицинскомъ обществѣ, пришелъ къ заключенію, что черезъ тѣло пострадавшаго проходила въ теченіе пяти минутъ энергія отъ 10 до 12 лош. силъ; но повидимому при этомъ вычисленіи въ недостаточной степени принято во вниманіе весьма

высокое сопротивленіе сожженной кожи и кожанныхъ подошвъ башмаковъ. Какъ бы то ни было тотъ фактъ, что, человѣкъ, испытавъ подобный ударъ, можетъ остаться живымъ, представляется весьма замѣчательнымъ.

(„Электро-Техн. Вѣстн.").

Новый способъ телеграфированія безъ проводовъ. Американскіе журналы сообщаютъ намъ, что Маркони нашелъ новый способъ телеграфированія безъ проволоки, обходясь безъ высокихъ мачтъ или башенъ для помѣщенія безпроволочнаго аппарата.

Нынѣ депеши, которыя были обмѣнены между кораблями, будутъ отправляться на уровнѣ воды, въ другихъ же случаяхъ аппаратъ будетъ помѣщаемъ на высотѣ обыкновеннаго стола.

Этотъ новый способъ имѣетъ, кромѣ того, по отзывамъ, то преимущество, что препятствуетъ перехватыванію телеграммъ въ пути.

Телеграфированіе безъ проводовъ во время хода поѣзда. Недавно достигнуты благопріятные результаты телеграфированія безъ проводовъ между поѣздомъ шедшимъ со станціи Маріенфельде въ Ренгсдорфъ. Успѣхъ даетъ надежду, что эта система будетъ примѣняться въ скоромъ времени многими государствами.

(„Почтово-Телегр. Ж.").

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 382 (4 сер.). Даны двѣ параллели и внѣ ихъ двѣ точки *A* и *B*. Изъ точки *A* провести сѣкущую, встрѣчающую параллели въ точкахъ *X* и *У* такъ, чтобы площадь *XBУ* была данной величины.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 383 (4 сер.). Доказать, что

$$\left(1+\sqrt[3]{\operatorname{tg}\omega}\right)\left(1+\sqrt[3]{\operatorname{tg}\omega_1}\right)=2,$$

гдѣ ω—уголъ между медіаной и биссекторомъ, проведенными изъ вершины одного изъ острыхъ угловъ прямоугольнаго треугольника, а ω_1—уголъ между аналогичными прямыми, проходящими черезъ вершину другого остраго угла.

Евг. Григорьевъ (Казань).

№ 384 (4 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\frac{(5-x)^5+(x-2)^5}{(5-x)^2+(x-2)^2}=3(5-x)(x-2).$$

Л. Ямпольскій (Braunschweig).

№ 385 (4 сер.) Рѣшить уравненіе

$$\sqrt[3]{76+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{76-\sqrt{x}}=8.$$

Г. Кривницкій (Кременчугъ).

№ 386 (4 сер.). Показать, что

$$a^2+b^2 \geqq \frac{(a+b)^2}{4},$$

если

$$a+b \geqq 0,$$

гдѣ a и b—вещественныя числа.

В. Тюнинъ (Уфа).

№ 387 (4 сер.). Нѣкоторый предметъ, высотою въ 2 метра, расположенъ въ 6 метрахъ отъ собирательной чечевицы, главное фокусное разстояніе которой равно 30 сантиметрамъ. Опредѣлить: 1) разстояніе x изображенія отъ чечевицы и 2) величину y этого изображенія.

(Заимств.) *М. Гербановскій.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 288 (4 сер.). *Вокругъ круга радіуса* R *построены* n *равныхъ окружностей, касающихся послѣдовательно между собой и даннаго круга; опредѣлить* 1) *радіусъ каждой изъ этихъ окружностей и* 2) *предѣлъ, къ которому стремится отношеніе суммы окружностей этихъ круговъ къ окружности даннаго круга при безконечномъ возрастаніи* n.

Называя центръ круга радіуса R черезъ O, центры n равныхъ окружностей послѣдовательно черезъ $O_1, O_2, O_3, \ldots, O_n$ и обозначая радіусъ каждой изъ этихъ окружностей черезъ x, находимъ: $O_1O_2=O_2O_3=\ldots=O_nO_1=2x$, $OO_1=OO_2=\ldots=OO_n=R+x$, откуда вытекаетъ, что многоугольникъ $O_1O_2\ldots O_n$, будучи равностороннимъ и при томъ вписаннымъ въ кругъ радіуса $R+x$, оказывается правильнымъ, такъ что $\angle O_1OO_2=\frac{2\pi}{n}$.

Слѣдовательно,

$$\frac{O_1O_2}{2}=OO_1\sin\frac{\angle O_1OO_2}{2}, \text{ или } x=(R+x)\sin\frac{\pi}{n},$$

откуда

$$x=\frac{R\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}} \qquad (1).$$

Сумма окружностей круговъ $O_1O_2\ldots O_n$ равна (см. (1))

$$2\pi nx=\frac{2\pi Rn\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}=\frac{2\pi^2R\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}}{1-\sin\frac{\pi}{n}} \qquad (2).$$

Предѣлъ знаменателя $1-\sin\frac{\pi}{n}$ (см. (2)) при безконечнмъ возраста-

ній n равенъ 1; предѣлъ числителя $2\pi^2 R \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}$ равенъ $2\pi^2 R$, такъ какъ при безконечномъ возрастаніи n уголъ $\frac{\pi}{n}$ стремится къ O, а потому, по извѣстной теоремѣ, дробь $\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}$ стремится къ предѣлу, равному 1. Итакъ искомый предѣлъ равенъ $2\pi^2 R$. Вторую часть задачи можно также рѣшить, доказавши предварительно, что периметръ $2nx$ многоугольника $O_1 O_2 \ldots O_n$ стремится при безконечномъ возрастаніи n къ предѣлу, равному длинѣ окружности $2\pi R$ круга O, откуда слѣдуетъ, что сумма длинъ окружностей $O_1, O_2, \ldots, O_n$, равная $n.2\pi x = \pi.(2nx)$, стремится къ предѣлу $2\pi^2 R$.

Я. Сыченковъ (Орелъ); *Г. Огановъ* (Эривань); *А. Заикинъ* (Самара); *И. Плотникъ* (Одесса).

№ 311 (4 сер.). *Преобразовать выраженіе*

$$\sqrt{\frac{1}{2}(\cos^{16}\varphi + \sin^{16}\varphi + \cos^4 2\varphi)}$$

въ другое, не содержащее радикала.

Сдѣлаемъ рядъ слѣдующихъ преобразованій даннаго выраженія:

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(\cos^{16}\varphi + \sin^{16}\varphi + \cos^4 2\varphi\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\cos^{16}\varphi + \sin^{16}\varphi + (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)^4\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\cos^{16}\varphi\left[1 + \operatorname{tg}^{16}\varphi + \left(\frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}\right)^4\right]} =$$

$$= \cos^8\varphi\sqrt{\frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{tg}^{16}\varphi + \left(\frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)^4\right]} =$$

$$= \cos^8\varphi\sqrt{\frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{tg}^{16}\varphi + \left(1 - \operatorname{tg}^2\varphi\right)^4\left(1 + \operatorname{tg}^2\varphi\right)^4\right]} =$$

$$= \cos^8\varphi\sqrt{\frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{tg}^{16}\varphi + \left(1 - \operatorname{tg}^4\varphi\right)^4\right]} =$$

$$= \cos^8\varphi\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^{16}\varphi + 1 - 4\operatorname{tg}^4\varphi + 6\operatorname{tg}^8\varphi - 4\operatorname{tg}^{12}\varphi + \operatorname{tg}^{16}\varphi\right)} =$$

$$= \cos^8\varphi\sqrt{x^{16} - 2x^{12} + 3x^8 - 2x^4 + 1} \quad (1),$$

гдѣ положено $x = \operatorname{tg}\varphi$.

Но изъ многочлена $x^{16}-2x^{12}+2x^{8}-2x^{4}+1$ извлекается по извѣстному правилу корень квадратный безъ остатка, и въ результатѣ получается $x^{8}-x^{4}+1$. Поэтому (см. (1))

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(\cos^{16}\varphi+\sin^{16}\varphi+\cos^{4}2\varphi\right)}=\cos^{8}\varphi\left(\operatorname{tg}^{8}\varphi-\operatorname{tg}^{4}\varphi+1\right)=$$

$$=\sin^{8}\varphi-\sin^{4}\varphi\cos^{4}\varphi+\cos^{8}\varphi.$$

Л. Ямпольскій (Braunschweig); *И. Плотникъ* (Одесса); *Г. Огановъ* (Эривань).

№ 317 (4 сер.). *Дана окружность и на ней точка* A. *Провести черезъ точку* A *хорду такъ, чтобы опущенный на нее изъ данной точки* B *перпендикуляръ дѣлилъ ее въ данномъ отношеніи.*

Пусть AC—искомая хорда, D—основаніе опущеннаго на нее изъ точки B перпендикуляра, O—центръ окружности, M—средина хорды, $\frac{m}{n}$ — данное отношеніе $\frac{AD}{DC}$. Предположимъ сперва, что точка D дѣлитъ хорду AC въ данномъ отношеніи внутреннимъ образомъ. Тогда

$$\frac{AD+DC}{AD}=\frac{AC}{AD}=\frac{m+n}{m},$$

$$\frac{AD+DC}{2}:AD=\frac{AM}{AD}=\frac{m+n}{2m} \qquad (1).$$

Пусть X—точка встрѣчи прямыхъ BD и AO, которыя навѣрно пересѣкутся, такъ какъ хорда AC не перпендикулярна къ радіусу OA; такъ какъ $OM \perp AC$, то (см. (1))

$$\frac{AO}{AX}=\frac{AM}{AD}=\frac{m+n}{2m} \qquad (2).$$

Отсюда вытекаетъ построеніе. Соединивъ прямой точку A съ центромъ O, строимъ точку X (см. (2)), удовлетворяющую равенству $\frac{AO}{AX}=\frac{m+n}{2m}$; затѣмъ проводимъ прямую BX и строимъ хорду AC, перпендикулярную къ BX. Если бы дѣленіе отрѣзка AC точкой D было внѣшнее, то, разсуждая подобнымъ же образомъ, мы нашли бы, что точка X удовлетворяетъ условію $\frac{AO}{AX}=\frac{m-n}{2m}$ (полагая $m>n$). Если точки B и X совпадаютъ, задача становится неопредѣленной, т. е. условію задачи удовлетворяетъ всякая хорда, проходящая черезъ точку A.

Л. Ямпольскій (Одесса); *Я. Дубновъ* (Одесса); *Н. С.* (Одесса).

Редакторы: **В. А. Циммерманъ** и **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 6-го Октября 1903 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.